

Ministerul Educaţiei Naţionale
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea”
Ediţia a XIII-a, 1 iunie 2013

Clasa a IV a

1. a)Calculaţi $\{[271-2\cdot(35:5-2\cdot 3)+1]:18-5\}:2+1$.

***

b)Determinaţi valoarea lui x din egalitatea**:**

$$2013-2012\cdot\{2011-2010:[2009-2008:(2007-2006\cdot x)]\}=1.$$

Prof. Corina Dragoş, Prof. Simona Pop

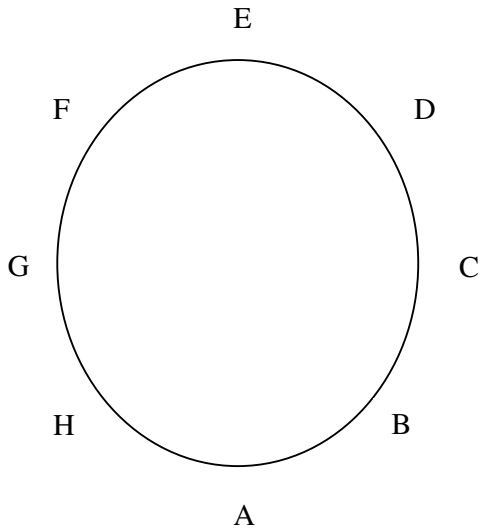
2. La Concursul Interjudeţean “Dumitru Tiganetea”,organizat cu ocazia zilei de 1 Iunie , participă la clasa a IV a de trei ori mai multe fete decât băieţi. Dacă ar pleca 40 de fete şi ar mai veni 30 de băieţi atunci numărul fetelor ar fi egal cu cel al băieţilor.Câte fete şi câţi băieţi participă la concurs?

Prof.Eugen Jecan, Prof. Cristian Pop

3. Peste un an, tatăl va fi de 3 ori mai în vârstă decât fiul său.Acum 5 ani tatăl era mai în vârstă cu 24 de ani decât fiul.Ce vârstă are fiecare în prezent?

****

4. Un cangur aleargă ,în ordine alfabetică , pe un traseu de forma unui cerc. El pleacă din A şi la primul salt ajunge în D, la următorul salt ajunge în G, apoi în B şi aşa mai departe.Unde se va afla cangurul după 2013 sărituri? ***



Timp de lucru 2 ore.



Ministerul Educaţiei Naţionale
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea”
Ediţia a XIII-a, 1 iunie 2013

Clasa a V-a

1. Să se calculeze numărul necunoscut din egalitatea
$\{31440 + 1040 : [150 - 2400 : (67 + 53)] \cdot 20\} : x + 10^3 = 1080$

***

2. a) Se dă şirul de numere naturale $1,2,3,7,8,9,13,14,15,19,20,21,\ldots,2011,2012,2013$. Să se afle numărul de termeni ai şirului. Prof.Eugen Jecan

b) Calculaţi suma $S = 9993 + 99988 + 999983 + 9999978 + \cdots + 999\ldots9848$

***

3. Să se arate că există cel puţin 2013 triplete (x, y, z) de numere naturale astfel încât numărul $5^x + 5^y + 5^z$ să fie cub perfect.

Prof.Vasile Serdean, Prof.Cristian Pop

4. Se dă numărul $N = 7 \cdot 2^n \cdot 5^{3n} + 2^{6n+2} \cdot 5^n, n \in \mathbb{N}^*$. Aflaţi n astfel încât ultimele 2013 cifre ale lui *N* să fie zerouri.

Prof.Eugen Jecan , Prof.Zoltan Fodor

Timp de lucru 2 ore.

Clasa a VI a

1. Aflaţi x din $\frac{a}{x} = \frac{27^{671}}{9}$ ştiind că $a = 27^{671} - 9^{1006} - 3^{2011}$.

Prof. Alina Găldean, Prof.Corina Dragoş.

2. Să se arate că $2013 = 2 + \frac{2012}{2} + \frac{2011}{2^2} + \frac{2010}{2^3} + \ldots + \frac{3}{2^{2010}} + \frac{2}{2^{2011}}$.

Prof.Vasile Serdean, Prof.Cristian Pop.

3. Se consideră triunghiul ABC cu $m(< A) = 90^0$ şi $m(< C) = 30^\circ$.

a) Să se arate că triunghiul se poate împărţi în 3 triunghiuri congruente.
b) Se poate împărti triunghiul în 1594323 triunghiuri congruente?Justificaţi răspunsul.
c) Dar în 1062013 tringhiuri? Justificaţi răspunsul.

Prof.Eugen Jecan, Prof. Camelia Magdaş.

4. Se consideră triunghiul ABC cu $m(< A) = 45^\circ$ şi D este mijlocul segmentului BC.Stiind că măsurile unghiurilor DAC şi DAB sunt direct proporţionale cu 3 şi 6, să se afle $m(< ABC)$.

Prof.Vasile Serdean, Prof. Camelia Magdaş.

Timp de lucru 2 ore.



Ministerul Educaţiei Naţionale
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

BAREM
Clasa a IV a

Soluţie

a) Finalizare x=6 **3 pct.**

b) Finalizare x=1 **4 pct.**

3.

Reprezentarea grafică sugerează **1 pct**

24:2=12-o parte **2 pct**

$12 \cdot 1 = 12$ şi $12 \cdot 3 = 36$ vârsta peste un an **2 pct**

12-1=11 şi respectiv 36-1=35 vârsta în prezent **2 pct**

4.

După 8 sărituri cangurul ajunge din nou în A **3 pct**

2013:8=251 rest 5 **2 pct**

După 2013 sărituri ajunge în F **2 pct**

Clasa a V a

1. Barem: Paranteza pătrată **(2p),** acolada **(3p),** finalizare $x = 395$ **(2p)**

2. Barem a) Şirul se formează astfel: se scriu primele trei numere naturale, apoi lipsesc trei numere, urmează alte trei consecutive, etc. Dacă vom completa după fiecare grupă de câte trei numere, cele trei numere lipsă, vom obţine şirul numerelor naturale, de la 1 la 2016 . **(2p)**

Acest şir conţine $2016:6 = 336$ grupe de câte şase numere, dintre care trei sunt din şirul dat şi trei sunt adăugate.

Deci numărul de termeni ai şirului dat este $336 \times 3 = 1008$. **(1p)**

b) Observăm că $9993 = 10000 - 7; 99988 = 100000 - 12; 999983 = 1000000 - 17$,…..

$999\ldots9848 = 1000\ldots0 - 152$ **(1p)**

Observăm că numărul de zerouri ale descăzutului este mai mare cu 3 decât indicele termenului.

Calculul sumei

$S_1 = 7 + 12 + 17 + \cdots + 152 = (5 \cdot 1 + 2) + (5 \cdot 2 + 2) + \cdots + (5 \cdot 30 + 2) = 2385$ **(2p)**

Finalizare $S = 10000 + 1000000 + \cdots + 1000\ldots0 - S_1 =$ 111…1107615 unde cifra 1 dupăsemnul egal apare de 29 ori **(1p)**

3. Barem. Pentru $x = 3n, y = 3n$ şi $z = 3n + 2, n \in \mathbb{N}^*$, **(4p)** avem:

$5^x + 5^y + 5^z = 5^{3n} + 5^{3n} + 5^{3n} \cdot 5^2 = 5^{3n}(1 + 1 + 5^2) = 5^{3n} \cdot 27 = (5^n \cdot 3)^3$ **(2p)** care este cub perfect.

Deoarece există o infinitate de triplete de forma $(3n, 3n, 3n + 2)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, problema este rezolvată. **(1p)**

4.. Barem Numărul *N* se poate scrie: $N = \overline{[10]}^n (7 \cdot \overline{[25]}^n + \overline{[32]}^{(n+2)})$. **(2p)** Analizând ultima cifră a numărului, avem:

$u(25^n) = 5$ deci $u(7 \cdot 25^n) = 5, n \neq 0$ (1) **(1p)**

$u(32^{n+2}) = u(2^n) \in \{2,4,6,8\}$ (2) **(1p)**

Din (1) şi (2) obţinem că $u(7 \cdot 25^n + 32^{n+2}) \in \{1,3,7,9\}$, (2p) prin urmare numărul $7 \cdot 25^n + 32^{n+2}$ nu se divide cu 10. Deci *N* are exact n zerouri la sfârşit. Pentru $n \geq 2013$ ultimele cifre ale lui *N* sunt zerouri. **(1p)**



Ministerul Educaţiei Naţionale
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu" Dej

Clasa a VI a

1. Obţinerea l lui $a = 5 \cdot 3^{2011}$ **4 pct**
Finalizare x=5 **3 pct.**

2. Avem $\frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2^2} = \frac{2-1}{2^2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}$,....

$\frac{1}{2^{2012}} = 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{2^{2012}}$ **2 pct**

Aşezăm calculele

$1 = 1$

$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$ şi adunăm membru cu membru ,obţinând

$\frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}$

$\vdots$

$\frac{1}{2^{2012}} = 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{2^{2012}}$

$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{2012}} = 2013 - \frac{2012}{2} - \frac{2011}{2^2} - \frac{2010}{2^3} - \ldots - \frac{3}{2^{2010}} - \frac{2}{2^{2011}} - \frac{1}{2^{2012}}$ **1pct** .

Calculul lui $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{2012}} = 2 - \frac{1}{2^{2011}}$ **3 pct**

Obţinem

$2013 - \frac{2012}{2} - \frac{2011}{2^2} - \frac{2010}{2^3} - \ldots - \frac{3}{2^{2010}} - \frac{2}{2^{2011}} - \frac{1}{2^{2012}} = 2 - \frac{1}{2^{2012}} \Leftrightarrow$ **1pt**

$2013 = 2 + \frac{2012}{2} + \frac{2011}{2^2} + \frac{2010}{2^3} + \ldots + \frac{3}{2^{2010}} + \frac{2}{2^{2011}}$

3.

a)Construcţia bisectoarei unghiului de 60° **1pct**
Construcţia bisectoarei unghiului de 120° **1pct**
Demonstrarea congruenţei celor 3 triunghiuri **1pct**
b) Prin procedeul anterior fiecare triunghi se împarte în alte 3 triunghiuri congruente **1pct**
In mod analog , la pasul n se obţin 3^n triunghiuri congruente **1 pct**
Observăm că $1594323 = 3^{13}$ **1pct**
c) 102013 nu este putere a lui 3 **1 pct.**

4.
Determinarea măsurii unghiurilor DAB şi DAC **2 pct.**
Construcţie ajutătoare :prelungim mediana AD cu DE $\equiv AD$ **0,5 pct**
Din congruenţa triunghiurilor ABD şi ECD obţinem $m(DEC) = 30^\circ$ **0,5 pct**
Construcţie ajutătoare: Construim AR $\perp$ EC. **0,5 pct**
In triunghiul ARE, cateta AR se opune unghiului de 30° , deci AR=AD=DE **0,5 pct**
In triunghiul dreptunghic ARE , mediana RD = AD=DE. **0,5 pct**
Obţinem triunghiul ARD echilateral, **0,5 pct**
deci $m(< DRC) = 30^\circ \Rightarrow m(< RAC) = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$, **0,5 pct**
deci $m(< RCA) = 45^\circ$ (triunghiul ARC dreptunghic isoscel) **0,5 pct**
Triunghiul DRC isoscel (RC=RA şi RA=RD)cu DR=RC $\Rightarrow m(< DCR) = 75^\circ$ **0,5 pct**
$m(< BCA) = 75 - 45 = 30 \Rightarrow m(< ABC) = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$ **0,5 pct**